

PITAGORASZ-TÉTEL, THÁLESZ-TÉTEL – GYAKORLÁS

8. (Érettségi feladat, 2005)

Kör alakú amfiteátrum küzdőterének két áttellenes pontjában, egy átmérő két végpontjában áll egy-egy gladiátor, az uralkodó a pálya szélén ül. A gladiátorok egyenes vonalban odafutnak az uralkodóhoz. Az egyik 20 métert, a másik 1 méterrel többet tesz meg, amíg odaér. Mekkora az amfiteátrum sugara? Készíts ábrát is a megoldáshoz!

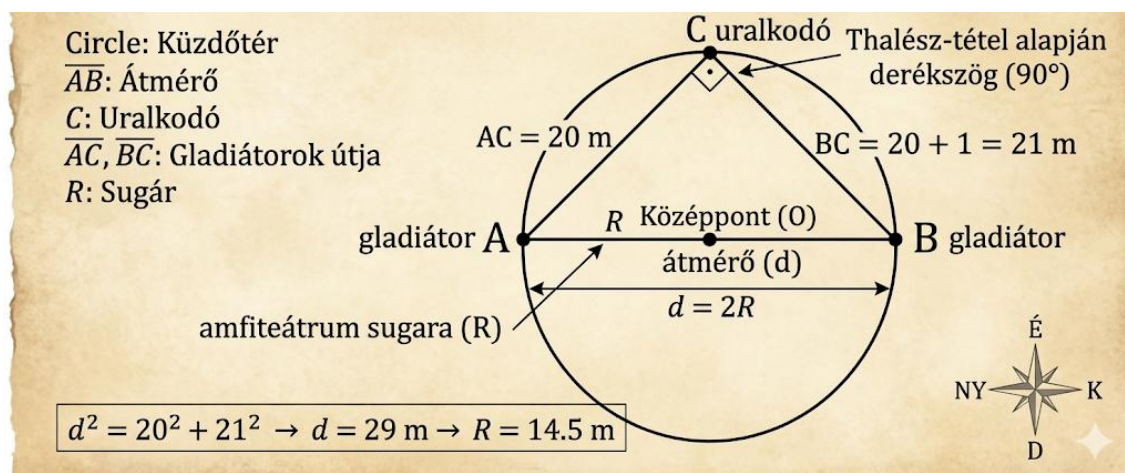
Megoldás:

1. Az adatok értelmezése

- **A pálya alakja: Kör.**
- **Gladiátorok helyzete:** Egy átmérő két végpontjában állnak (legyen ez az A és B pont).
- **Az uralkodó helyzete:** A pálya szélén, azaz a körvonal egy pontján ül (legyen ez a C pont).
- **Megtett utak:**
 - Az egyik gladiátor útja: $AC = 20$ m
 - A másik gladiátor útja: $BC = 20 + 1 = 21$ m

2. Geometria összefüggés: Thalész-tétel

- Mivel a gladiátorok egy átmérő két végpontjában állnak, és az uralkodó a körvonal egy pontján tartózkodik, az általuk bezárt háromszög (ABC) egy **derékszögű háromszög**.
- Ennek oka a **Thalész-tétel**, amely kimondja, hogy egy kör átmérője fölé írt kerületi szög minden esetben derékszög (90°).



3. Számítás (Pitagorasz-tétel)

- A derékszögű háromszögben az átfogó maga az amfiteátrum küzdőterének átmérője (d).
- A két befogó pedig a gladiátorok által megtett út (20 m és 21 m).
- Használjuk a Pitagorasz-tételt ($a^2 + b^2 = c^2$)
$$20^2 + 21^2 = d^2$$

$$400 + 441 = d^2$$

$$841 = d^2$$

4. A sugár me:

$$d = \sqrt{841} = 29 \text{ m}$$

A feladat a küzdőtér sugarát (r) kérdezi.

Tudjuk, hogy a sugár az átmérő fele:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{29}{2} = 14,5 \text{ m}$$

Válasz: Az amfiteátrum sugarának hossza 14,5 méter.

- 1.** Csehország zászlaja egy szabályos háromszöget tartalmaz, amely éppen a zászló közepéig nyúlik be.



Mekkora a zászló egyes részeinek területei, ha a zászlót alkotó téglalap rövidebbik (függőleges) oldala éppen 1 m hosszú?

Megoldás:

1. Az adatok meghatározása

- **A zászló magassága (a):** 1 m.
Mivel a kék rész egy szabályos háromszög, az oldalhossza megegyezik a zászló rövid oldalával, tehát minden oldala 1 m.
- **A háromszög magassága (m):**
Egy szabályos háromszög magassága a képlet alapján:

$$m = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$m = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 0,866 \text{ m}$$
- **A zászló hossza (b):** Mivel a háromszög csúcsa pontosan a zászló közepéig ér, a zászló teljes hossza a háromszög magasságának a kétszerese.

$$b = 2 \cdot m = \sqrt{3} \approx 1,732 \text{ m}$$

2. A területek kiszámítása

- **Kék rész (szabályos háromszög):**

$$T_{\text{kék}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$T_{\text{kék}} = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,433 \text{ m}^2$$

- **A teljes zászló területe:**

$$T_{\text{összes}} = a \cdot b = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \approx 1,732 \text{ m}^2$$

- **Fehér és Piros részek:**

A fehér és a piros rész alakja és mérete megegyezik (szimmetrikusak).

Területüket úgy kapjuk meg, ha a teljes területből kivonjuk a kéket, majd elosztjuk kettővel.

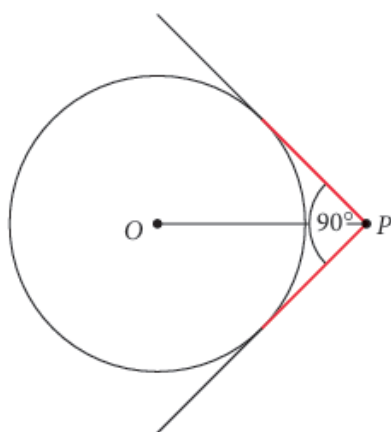
$$T_{\text{fehér}} = T_{\text{piros}} = \frac{T_{\text{összes}} - T_{\text{kék}}}{2}$$

$$T_{\text{fehér}} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,650 \text{ m}^2$$

Összegzés:

- Kék terület: $\approx 0,433 \text{ m}^2$
- Fehér terület: $\approx 0,650 \text{ m}^2$
- Piros terület: $\approx 0,650 \text{ m}^2$.

- 2.** Egy O középpontú kör sugara 5 egység. A körhöz egy külső P pontból érintőket húzunk, amelyek éppen 90° -os szöget zárnak be egymással.



Megjegyzés:

A derékszögben találkozó érintők és a sugarak egy 5×5 -ös négyzetet feszítenek ki, ahol az OP távolság a négyzet átlója, az érintőszakaszok pedig a négyzet oldalai.

- a)** Mekkora az OP távolság?
b) Milyen hosszúak a P -ből a körhöz húzott érintőszakaszok?

Megoldás:

A mértani összefüggések elemzése

Amikor egy külső P pontból érintőket húzunk egy körhöz:

- Az érintési pontokba húzott sugarak merőlegesek az érintőkre (90°).
- A feladat szerint az érintők egymással is 90° -os szöget zárnak be.
- Mivel a négyszög három szöge 90° , a negyediknek is annak kell lennie.
- Ráadásul két szomszédos oldala a kör sugara ($r = 5$), így ez az alakzat egy négyzet.

a) Mekkora az OP távolság?

Az OP szakasz ennek a 5 egység oldalhosszúságú **négyzetnek az átlója**.

A négyzet átlóját a **Pitagorasz-tétellel** vagy az **$a\sqrt{2}$ összefüggéssel** számolhatjuk ki:

$$OP = r \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7,07 \text{ egység}$$

b) Milyen hosszúak a P -ből a körhöz húzott érintőszakaszok?

Mivel a fentebb leírt alakzat egy négyzet, minden oldala egyenlő hosszúságú. Az érintőszakasz hossza (a P ponttól az érintési pontig) megegyezik a kör sugarával. $\Rightarrow$ **Az érintőszakaszok hossza: 5 egység.**

- 3** Mekkora szöget zár be egymással a háromszög két-két magasságvonala, ha a háromszög szögei közül az egyik 70° -os és egy másik 30° -os nagyságú?

Megoldás:

1. A háromszög adatainak meghatározása

Először számoljuk ki a háromszög harmadik szögét, mivel a magasságvonalak bármelyik két oldalhoz tartozhatnak.

- Adott szögek: 70° és 30°
- **Harmadik szög:** $180^\circ - (70^\circ + 30^\circ) = 80^\circ$

Mivel két magasságvonal metszéspontjáról van szó, három különböző eset lehetséges attól függően, hogy melyik két csúcsból húzzuk meg a magasságokat.

2. A magasságvonalak által bezárt szög kiszámítása

Általános szabály, hogy két magasságvonal metszéspontjánál keletkező szög megegyezik a harmadik (közbezárt) csúcsnál lévő belső szög kiegészítő szögével ($180^\circ - \gamma$), vagy magával a belső szöggel.

Nézzük a konkrét párokat:

a) Ha a 70° -os és a 30° -os szögek melletti magasságokat nézzük:

- Ekkor a magasságvonalak a 80° -os csúccsal szemközti oldalakra merőlegesek.
- A magasságpontnál keletkező egyik szög: $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$
- A mellette lévő (váltószög): 80°

b) Ha a 70° -os és a 80° -os szögek melletti magasságokat nézzük:

- Ekkor a magasságvonalak a 30° -os csúccsal szemközti oldalakra merőlegesek.
- A magasságpontnál keletkező egyik szög: $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$
- A mellette lévő (váltószög): 30°

c) Ha a 30° -os és a 80° -os szögek melletti magasságokat nézzük:

- Ekkor a magasságvonalak a 70° -os csúccsal szemközti oldalakra merőlegesek.
- A magasságpontnál keletkező egyik szög: $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
- A mellette lévő (váltószög): 70°

Összegzés

A feladat kérdésére (mekkora szöget zárnak be egymással) a válasz attól függ, melyik két magasságvonalat választjuk.

A lehetséges szögpárok:

- 80° és 100°
- 30° és 150°
- 70° és 110°

Megjegyzés: A "bezárt szög" alatt a geometriában gyakran a kisebb, azaz a hegyesszöget értjük, így a válaszok:

- 80°
 - 30°
 - 70°
-

4. Milyen magas a városháza tornya? Azt tudjuk, hogy amikor a Nap sugarai 30° -os szögben érik a talajt, akkor a torony árnyéka 42 méter.

Megoldás:

Adatok:

- Napsugarak beesési szöge: 30°
- A torony árnyékának hossza: $b = 42$ m
- A torony magassága: $a = ?$

Elméleti háttér:

A torony magassága (a), az árnyék (b) és a napsugár egy olyan derékszögű háromszöget alkot, amelynek szögei 30° , 60° és 90° .

- Ez a háromszög egy $2a$ oldalhosszúságú szabályos háromszög fele.
- Emiatt az átfogó hossza a torony magasságának kétszerese, azaz $c = 2a$.

Megoldás a Pitagorasz-tétellel:

A derékszögű háromszögre felírható összefüggés ($a^2 + b^2 = c^2$ alapján)

$$a^2 + 42^2 = (2a)^2$$

A számítás lépései:

- Végezzük el a négyzetre emelést: $a^2 + 1764 = 4a^2$
- Rendezzük az egyenletet: $1764 = 3a^2$
- Osszunk le hárommal: $a^2 = 588$
- Vonjunk négyzetgyököt: $a = \sqrt{588}$

$$\text{Mivel } \sqrt{588} = \sqrt{196 \cdot 3} = 14\sqrt{3}:$$

$$a \approx 14 \cdot 1,732$$

$$a \approx 24,25 \text{ méter}$$

Végeredmény: A városháza tornya körülbelül 24,25 méter magas.

6. A képen látható kerék átmérője 80 cm, és négy egyforma széles deszkalapból faragták, amelyeket azután egymás mellé illesztettek. Milyen hosszúak az egyes illesztések (az ábrán pirossal jelölve).



Megoldás:

1. Az adatok kigyűjtése:

- A kör átmérője: $d = 80$ cm
- A kör sugara: $r = 40$ cm
- A deszkák száma: 4 darab, egyforma szélességűek

2. A deszkák szélességének meghatározása:

Mivel a négy egyforma szélességű deszka pontosan kitölti a 80 cm átmérőt, egy deszka szélessége: $80 \text{ cm} / 4 = 20 \text{ cm}$.

3. Az illesztések (húrok) távolsága a középponttól:

A kör középpontja a két középső deszka találkozásánál van. Az illesztések távolsága a középponttól (t):

- Középső illesztés: $t_1 = 0$ cm (ez a kör átmérője)
- Szélső illesztések: $t_2 = 20$ cm (egy deszkaszélességre a középponttól)

4. Az illesztések hosszának kiszámítása:

A kör egy húrjának hosszát (h) a sugár (r) és a középponttól mért távolság (t) segítségével, a Pitagorasz-tétel alkalmazásával kapjuk meg: $(\frac{h}{2})^2 + t^2 = r^2$

A középső illesztés hossza:

Mivel ez áthalad a középponton, a hossza megegyezik az átmérővel:

$$h_1 = 80 \text{ cm}$$

A két szélső illesztés hossza:

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a félhúrra:

$$\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 + 20^2 = 40^2$$

$$\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 + 400 = 1600$$

$$\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 = 1200$$

$$\frac{h_2}{2} = \sqrt{1200} = \sqrt{400 \cdot 3} = 20\sqrt{3}$$

$$h_2 = 40\sqrt{3} \approx 40 \cdot 1,732$$

$$h_2 \approx 69,28 \text{ cm}$$

Végeredmény:

A középső illesztés hossza 80 cm, a két szélső illesztés hossza pedig egyenként körülbelül 69,28 cm.

1. Hány fokos szöget zárnak be egymással az óramutatók

a) 2:45-kor,

b) 16:40-kor?

Megoldás:

Az óra számlapja egy teljes kör, amely 360° -os szöget jelent.

A mutatók elmozdulását két különböző szögsebességgel számoljuk:

1. A nagymutató (percmutató) mozgása:

- A nagymutató 60 perc alatt tesz meg egy teljes kört (360°).
- Egy perc alatt megtett útja: $360^\circ / 60 = 6^\circ$.
- Tehát n perc alatt $n \cdot 6^\circ$ távolságra kerül a 12-es jelzéstől.

2. A kismutató (óramutató) mozgása:

- A kismutató 12 óra (720 perc) alatt tesz meg egy teljes kört (360°).
- Egy óra alatt megtett útja: $360^\circ / 12 = 30^\circ$.
- Egy perc alatt megtett útja: $30^\circ / 60 = 0,5^\circ$.

Fontos: A kismutató nem ugrik óráról órára, hanem folyamatosan halad a percekkel is.

- Helyzete: $(\text{órák száma} \cdot 30^\circ) + (\text{percek száma} \cdot 0,5^\circ)$.

3. A bezárt szög meghatározása:

- Kiszámoljuk mindkét mutató távolságát a 12-es jelzéstől (fokokban).
- A két érték különbségének abszolút értéke adja meg a bezárt szöget.
- Ha ez a különbség nagyobb, mint 180° , akkor a homorú szöget kaptuk meg.

Mivel általában a kisebb (konvex) szöget keressük, ilyenkor kivonjuk az értéket 360° -ból.

A teljes számlap 360° . Egy órajel 30° , egy percjel 6° .

Míg a nagymutató 6° -ot, addig a kismutató percenként $0,5^\circ$ -ot halad el.

a) 2:45-kor:

Nagymutató helyzete: $45 \cdot 6^\circ = 270^\circ$

Kismutató helyzete: $(2 \cdot 30^\circ) + (45 \cdot 0,5^\circ) = 60^\circ + 22,5^\circ = 82,5^\circ$

Szögekülönbség: $|270^\circ - 82,5^\circ| = 187,5^\circ$

A kisebbik, bezárt szög: $360^\circ - 187,5^\circ = 172,5^\circ$

b) 16:40-kor:

Nagymutató helyzete: $40 \cdot 6^\circ = 240^\circ$

Kismutató helyzete: $(4 \cdot 30^\circ) + (40 \cdot 0,5^\circ) = 120^\circ + 20^\circ = 140^\circ$

A bezárt szög: $|240^\circ - 140^\circ| = 100^\circ$

- 2.**  **a)** Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 40° -os.
Mekkorák a háromszög szögei?
- b)** Egy egyenlő szárú háromszög alapján fekvő egyik szög 80° -os. Mekkorák a háromszög szögei?
- c)** Egy egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögeinek szögfelezői 150° -os szöget zárnak be egymással. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás:

Összefüggés: A belső szögek összege 180° , az alapi szögek egyenlők.

a) Szárszög 40° :

$$\text{Alapi szögek} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

Szögek: $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$.

b) Alapi szög 80° :

Másik alapi szög is 80° .

$$\text{Szárszög} = 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

Szögek: $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$.

c) Szögfelezők szöge 150° :

Jelöljük a háromszög alapi szögeit α -val. Mivel a háromszög egyenlő szárú, mindkét alapi szög egyenlő.

- A szögfelezők behúzásával az alap felett keletkezik egy új, kisebb háromszög.
- Ennek a kisháromszögnek az alapon fekvő szögei az eredeti szögek felei: $\frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\alpha}{2}$.
- A kisháromszög belső szögeinek összege 180° :

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + 150^\circ = 180^\circ$$

- Összevonva a törteket:

$$\alpha + 150^\circ = 180^\circ$$

- Ebből az eredeti háromszög egy-egy alapi szöge:

$$\alpha = 30^\circ$$

- Az eredeti háromszög belső szögeinek összege szintén 180° :

$$\alpha + \alpha + \gamma = 180^\circ$$

- Behelyettesítve a kapott 30° -os értéket:

$$30^\circ + 30^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$60^\circ + \gamma = 180^\circ$$

- Ebből a szárszög:

$$\gamma = 120^\circ$$

Végeredmény:

A háromszög szögei: $30^\circ, 30^\circ$ és 120° .

3. Egy háromszög oldalhosszai centiméterben kifejezve egész számok. Két oldal hossza 3 cm és 7 cm. Hány ilyen háromszög van? Mekkora lehet a háromszögek kerülete?

Megoldás:

Oldalak: 3 cm, 7 cm, x cm.

Háromszög-egyenlőtlenség szabálya: $7 - 3 < x < 7 + 3$

A háromszög-egyenlőtlenség azt mondja ki, hogy egy háromszög bármely két oldalának összege mindig nagyobb kell, hogy legyen a harmadik oldalnál. Ha ez nem teljesül, a háromszög nem "záródik be", tehát nem szerkeszthető meg. Matematikai formában, ha az oldalak a , b és c :

1. $a + b > c$
2. $a + c > b$
3. $b + c > a$

Adott két oldal: $a = 3$ cm és $b = 7$ cm. A harmadik oldalt jelöljük x -szel.

A három szabálynak egyszerre kell teljesülnie:

1. $3 + 7 > x \implies 10 > x$ (tehát x kisebb kell legyen 10-nél)
2. $3 + x > 7 \implies x > 4$ (tehát x nagyobb kell legyen 4-nél)
3. $7 + x > 3 \implies x > -4$ (ez mindig igaz, hiszen egy oldal hossza pozitív)

Az első két pont összevonásából kapjuk meg a harmadik oldal lehetséges tartományát: $4 < x < 10$

Ez egy nagyon hasznos segéd szabály: a harmadik oldalnak mindig nagyobbnak kell lennie a két ismert oldal különbségénél ($7 - 3 = 4$), és kisebbnek az összegükénél ($7 + 3 = 10$).

Azaz: $4 < x < 10$

• Hány ilyen háromszög van?

Lehetséges egész számok: 5, 6, 7, 8, 9.

Tehát összesen **5** darab ilyen háromszög létezik.

• Mekkora lehet a háromszögek kerülete (cm)?

$$x = 5 \text{ esetén: } K = 3 + 7 + 5 = 15$$

$$x = 6 \text{ esetén: } K = 3 + 7 + 6 = 16$$

$$x = 7 \text{ esetén: } K = 3 + 7 + 7 = 17$$

$$x = 8 \text{ esetén: } K = 3 + 7 + 8 = 18$$

$$x = 9 \text{ esetén: } K = 3 + 7 + 9 = 19$$

4. Melyik téglalap átlója hosszabb: amelynek oldalai 3,4 cm és 4,5 cm hosszúak, vagy amelynek oldalai 2,8 cm és 4,9 cm hosszúak?

Megoldás:

Pitagorasz-tétel alkalmazása: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

- 1. téglalap: 3,4 cm és 4,5 cm

$$d_1 = \sqrt{3,4^2 + 4,5^2}$$

$$d_1 = \sqrt{11,56 + 20,25} = \sqrt{31,81} \approx 5,6401 \text{ cm}$$

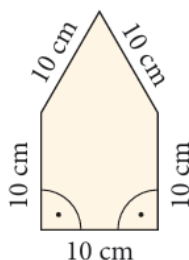
- 2. téglalap: 2,8 cm és 4,9 cm

$$d_2 = \sqrt{2,8^2 + 4,9^2}$$

$$d_2 = \sqrt{7,84 + 24,01} = \sqrt{31,85} \approx 5,6436 \text{ cm}$$

Összevetés: $d_2 > d_1$, tehát a **második** téglalap átlója hosszabb.

5. Áron azt a feladatot kapta, hogy egy 55 cm hosszú, 29 cm széles, téglalap alakú kartonlapon vágjon ki 10 db egyforma „házikót” az ábra szerinti méretekkel.



- a) Számítással mutasd meg, hogy Áron feladata megoldható!
- b) Számítsd ki, hány százalék hulladék keletkezett!

Megoldás:

Az adatok kigyűjtése:

- Kartonlap mérete: 55 cm $\times$ 29 cm
- Házikó alapja: 10 cm-es négyzet
- Házikó teteje: 10 cm oldalú szabályos háromszög

a) Megoldhatóság igazolása:

1. A házikó teljes magasságának kiszámítása:

A tető (szabályos háromszög) magassága: $m = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 8,66 \text{ cm}$

A házikó teljes magassága: 10 cm (négyzet) + 8,66 cm (tető) = 18,66 cm

2. Elrendezés a kartonlapon:

Ha 5 darab házikót teszünk egymás mellé, a szélességük: $5 \cdot 10 = 50 \text{ cm}$.

Mivel $50 \text{ cm} \leq 55 \text{ cm}$, a szélesség megfelelő.

A házikók két sorban (5-5 darab) összeforgatva elhelyezhetők a 29 cm-es szélességen is.

Áron feladata megoldható.

b) Hulladék kiszámítása:

1. A kartonlap területe:

$$T_{\text{karton}} = 55 \cdot 29 = \mathbf{1595 \text{ cm}^2}$$

2. Egy házikó területe:

$$T_{\text{négyzet}} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$$

$$T_{\text{tető}} = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 43,3 \text{ cm}^2$$

$$T_{\text{házikó}} = 100 + 43,3 = 143,3 \text{ cm}^2$$

3. 10 darab házikó összes területe:

$$T_{\text{összes}} = 10 \cdot 143,3 = \mathbf{1433 \text{ cm}^2}$$

4. A hulladék százalékos aránya:

$$\text{Hulladék területe: } 1595 - 1433 = 162 \text{ cm}^2$$

$$\text{Százalékban: } \frac{162}{1595} \cdot 100 \approx 10,15\%$$

Végeredmény:

A keletkezett hulladék: **10,15%**

6. Az Andrásy út egyik végétől kiindulva 2000 m hossz-
szan egy kötelet szeretnénk kifeszíteni. A kötel két
végét rögzítjük is az egymástól pontosan 2 km tá-
volságra lévő pontok között, de kiderül, hogy a kötel
2001 méter hosszú, ezért nem feszes. Milyen magasra
tudnánk felemelni a kötelet, ha a közepénél felemelve
kifeszítenénk? Átférne alatta a 4-6-os villamos?

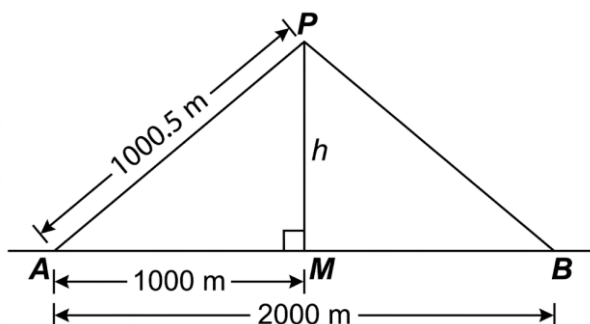
Megoldás:

1. Az adatok kigyűjtése:

- A rögzítési pontok távolsága: $d = 2000$ m
- A kötel teljes hossza: $L = 2001$ m
- A kötel közepe a felemeléskor két egybevágó derékszögű háromszöget alkot.

2. A derékszögű háromszög adatai:

- Az átfogó a kötel hosszának fele: $c = 2001/2 = 1000,5$ m
- Az egyik befogó a rögzítési távolság fele: $b = 2000/2 = 1000$ m
- A másik befogó a keresett magasság: h



3. Számítás:

A Pitagorasz-tétel segítségével számoljuk ki a magasságot: $h^2 + b^2 = c^2$

$$h^2 + 1000^2 = 1000,5^2$$

$$h^2 + 1\,000\,000 = 1\,001\,000,25$$

$$h^2 = 1000,25$$

$$h = \sqrt{1000,25}$$

$$h \approx 31,62 \text{ méter}$$

4. Következtetés:

- A villamosok felsővezetékének magassága általában 5-6 méter.
- Mivel a kötel több mint 31 méter magasra emelkedik, kényelmesen elfér alatta.

Végeredmény:

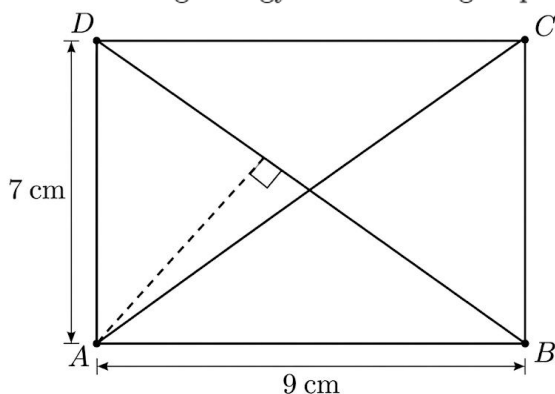
**A kötelet körülbelül 31,62 méter magasra tudnánk felemelni,
így a 4-6-os villamos bőségesen átférne alatta.**

7 Egy téglalap oldalai 7 cm és 9 cm hosszúak. Milyen messze van a téglalap egyik csúcsa a téglalap két átlójától?

Megoldás:

1. Adatok és összefüggések:

- Téglalap oldalai: $a = 7$ cm, $b = 9$ cm.
- Az átló hossza (Pitagorasz-tétellel): $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130} \approx 11,4$ cm.
- A csúcs távolsága az egyik átlótól a téglalap egyik háromszögének magassága (m).



2. Számítás a terület segítségével:

$$\text{A háromszög területe: } T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{d \cdot m}{2}$$

$$7 \cdot 9 = \sqrt{130} \cdot m$$

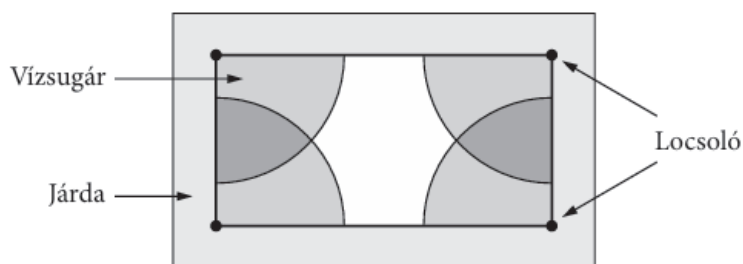
$$m = \frac{63}{\sqrt{130}} \approx 5,526 \text{ cm.}$$

3. Távolság a két átlótól:

- A csúcs távolsága attól az átlótól, amely áthalad rajta: **0 cm.**
- A csúcs távolsága a másik átlótól: **kb. 5,53 cm.**

8. (Kompetenciamérés, 2013)

Téglalap alakú kertekhez találták ki az olyan locsolót, amely egy negyedkör (derékszögű körcikk) alakú területet locsol meg, így a kert sarkába állítva csak a kertet öntözi, ahogy a következő ábra mutatja. Egy 3 méter széles és 4 méter hosszú (téglalap alakú) virágoskertben milyen legkisebb hatósugarú locsolókra van szükség ahhoz, hogy a kert egész területe meg legyen öntözve?



Megoldás:

Ahhoz, hogy a téglalap alakú kert (3 m x 4 m) teljes területe öntözve legyen a sarkokba helyezett negyedkör alakú szórófejekkel, a hatósugárnak el kell érnie a kert középpontját. A kert középpontja a téglalap átlóinak metszéspontja.

Számítás:

- Az átló hossza: $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ m.
- A középpont távolsága a sarkoktól: $R = \frac{d}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ m.

Végeredmény:

A legkisebb hatósugár 2,5 méter.

9. Egy háromszög belső szögeinek aránya $10:11:15$.
Hány fokos a legkisebb külső szög?

Megoldás:

1. A belső szögek kiszámítása:

- A háromszög belső szögeinek összege minden esetben 180° .
- Az arányokat jelöljük egy közös szorzóval (k):

$$\alpha = 10k$$

$$\beta = 11k$$

$$\gamma = 15k$$

- Írjuk fel az egyenletet:

$$10k + 11k + 15k = 180^\circ$$

$$36k = 180^\circ$$

$$k = 180^\circ / 36 = 5^\circ$$

- A konkrét belső szögek:

$$\alpha = 10 \cdot 5^\circ = 50^\circ$$

$$\beta = 11 \cdot 5^\circ = 55^\circ$$

$$\gamma = 15 \cdot 5^\circ = 75^\circ$$

2. A külső szögek fogalma:

- A háromszög külső szöge egy belső szög mellett fekvő kiegészítő szög.
- Egy belső szög és a hozzá tartozó külső szög összege mindig 180° .
- Ebből következik egy fontos összefüggés: minél **nagyobb** egy belső szög, annál **kisebb** lesz a hozzá tartozó külső szög.

3. A legkisebb külső szög kiszámítása:

- A legnagyobb belső szög: 75°
- A hozzá tartozó legkisebb külső szög: $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

Végeredmény:

A legkisebb külső szög 105 fokos.

10 ☞ Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, és két szöge 30° -os.

a) Mekkora az alaphoz tartozó magassága?

b) Mekkora a szárhoz tartozó magassága?

Megoldás:

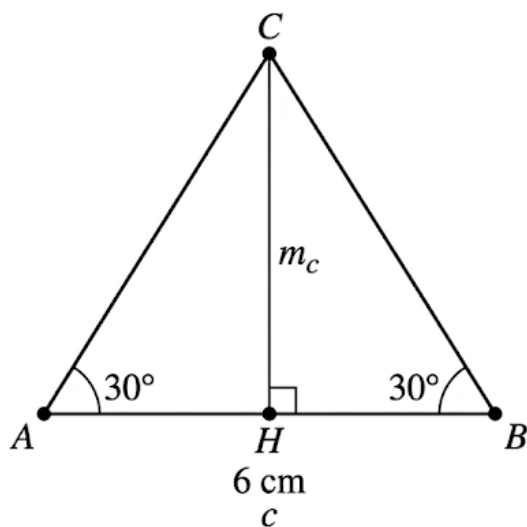
Adatok: Alap $c = 6$ cm, alapi szögek $\alpha = \beta = 30^\circ$.

Ebből következik, hogy a szárszög $\gamma = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$.

a) Alaphoz tartozó magasság (m_c) kiszámítása:

- A magasság behúzásával két egybevágó derékszögű háromszöget kapunk.
- Ezek szögei 30° , 60° és 90° .
- Egy $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ -os háromszög egy szabályos háromszög fele.
- Ebben a 30° -os szöggel szemkötti befogó (m_c) fele az átfogónak (szár).
- A hosszabbik befogó (az alap fele $= 3$ cm) pedig a rövid befogó $\sqrt{3}$ -szorosa.
- Összefüggés: $3 = m_c \cdot \sqrt{3}$
- $m_c = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1,73$ cm.

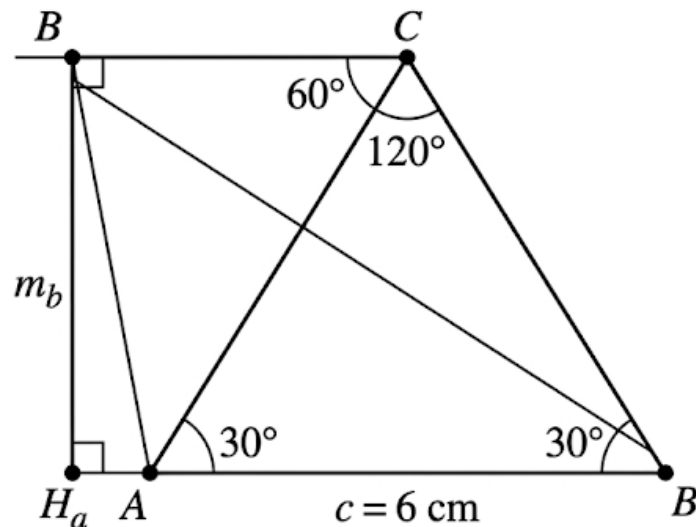
Végeredmény: Az alaphoz tartozó magasság kb. 1,73 cm.



b) Szárhoz tartozó magasság (m_b) kiszámítása:

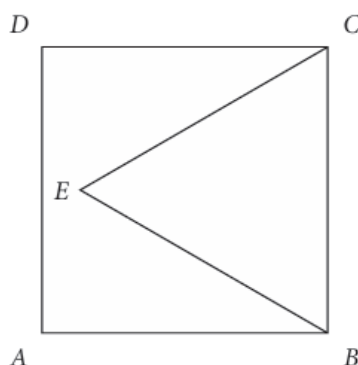
- Húzzuk be a szárhoz tartozó magasságot az egyik alapi csúcsból.
- Mivel a szárszög 120° (tompaszög), ez a magasság a háromszögön kívülre esik.
- A magasság, a szár meghosszabbítása és az alap (6 cm) egy derékszögű háromszöget alkot.
- Ennek a külső derékszögű háromszögnek az átfogója maga az alap (6 cm).
- A szárszög melletti külső szög: $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
- A harmadik szög tehát 30° .
- Ebben a $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ -os háromszögben a keresett magasság (m_b) a 30° -os szöggel szemközti befogó.
- Szabály: a 30° -os szöggel szemközti befogó az átfogó fele.
- $m_b = 6/2 = 3$ cm.

Végeredmény: A szárhoz tartozó magasság 3 cm.



11. (Érettségi feladat, 2019)

Az $ABCD$ négyzet oldalának hossza 12 egység. A négyzet belsejében kijelöltük az E pontot úgy, hogy $BE = CE = 12$ egység legyen (lásd az ábrát). Számítsd ki az A és E pontok távolságát!

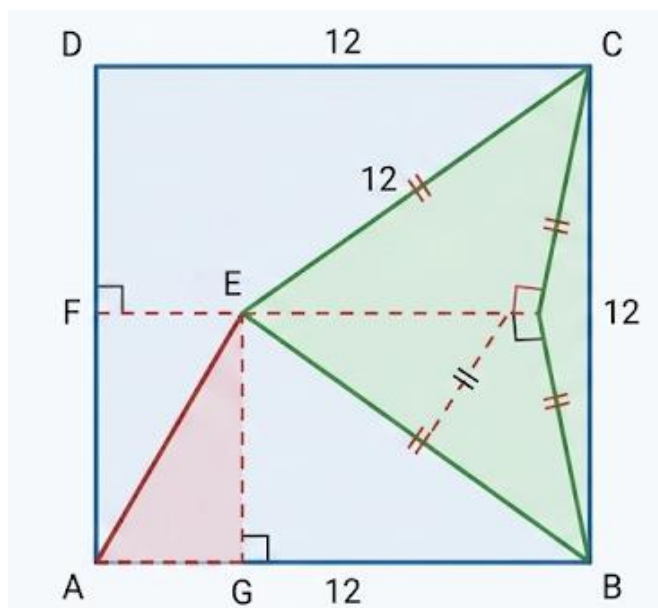


Megoldás:

Adatok: $ABCD$ egy 12 egység oldalú négyzet. $BE = CE = 12$ egység.

Mivel $BC = 12$ és $BE = CE = 12$, ezért a BCE háromszög szabályos.

I. Megoldás: Koordináta-geometria nélkül (Pitagorasz-tétellel)



1. A szabályos háromszög magassága:

- Húzzuk be a BCE szabályos háromszög BC oldalhoz tartozó magasságát (m).
- $m = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10,39$ egység.

2. Keressünk egy derékszögű háromszöget az AE szakaszhoz:

- Vetítsük az E pontot az AB oldalra, legyen ez a pont F , és az AD oldalra, legyen ez G .
- Mivel E a szabályos háromszög csúcsa, az AB oldaltól való távolsága:

$$AF = 12/2 = 6 \text{ (hiszen a magasság felezi a szemközti oldalt).}$$

- Az E pont távolsága az AD oldaltól (AG szakasz):

$$AG = AB - m = 12 - 6\sqrt{3} \approx 1,61 \text{ egység.}$$

3. Pitagorasz-tétel az AGE derékszögű háromszögben:

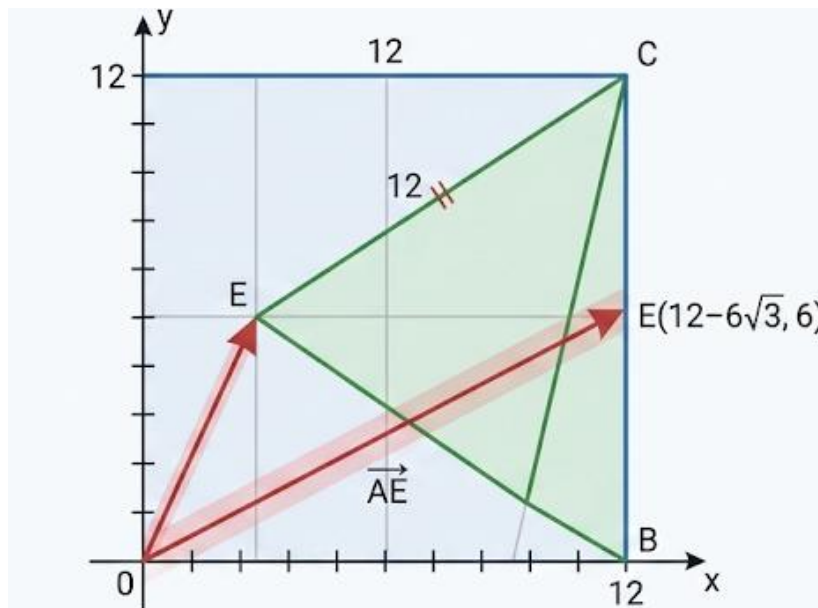
$$AE^2 = AF^2 + AG^2 \text{ (ahol } AF \text{ az } y \text{ irányú, } AG \text{ az } x \text{ irányú elmozdulás)}$$

$$AE^2 = 6^2 + (12 - 6\sqrt{3})^2$$

$$AE^2 = 36 + (144 - 144\sqrt{3} + 108) = 288 - 144\sqrt{3}$$

$$AE = \sqrt{288 - 144\sqrt{3}} \approx 6,21 \text{ egység.}$$

II. Megoldás: Koordináta-geometriával



1. A négyzet elhelyezése a koordináta-rendszerben:

- $A(0;0)$, $B(12;0)$, $C(12;12)$, $D(0;12)$

2. Az E pont koordinátáinak meghatározása:

- Az E pont a BC oldal felezőmerőlegesén van, magassága: $y_E = 6$
- Az x-koordináta a B ponttól mért távolság (a háromszög magassága):

$$x_E = 12 - 6\sqrt{3} \approx 12 - 10,39 = 1,61$$

- Tehát az E pont koordinátái: $E(12 - 6\sqrt{3}; 6)$

3. Az AE távolság kiszámítása a távolságképlettel:

$$d(A, E) = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}$$

$$d(A, E) = \sqrt{(12 - 6\sqrt{3} - 0)^2 + (6 - 0)^2}$$

$$d(A, E) = \sqrt{(12 - 6\sqrt{3})^2 + 6^2}$$

$$d(A, E) = \sqrt{144 - 144\sqrt{3} + 108 + 36}$$

$$d(A, E) = \sqrt{288 - 144\sqrt{3}} \approx 6,21$$

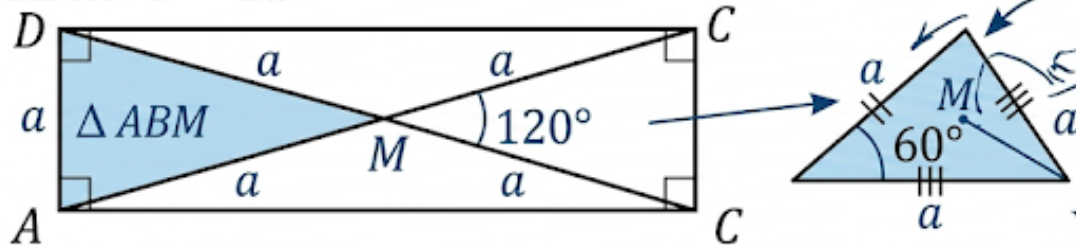
Végeredmény:

Az A és E pontok távolsága kb. 6,21 egység.

- 12** Egy téglalap átlója az egyik oldal kétszerese. Mekkora az átlóinak a hajlásszöge?

Megoldás:

ADAT: $d = 2a$



1. Adatok és összefüggések:

- Legyen a téglalap rövidebb oldala: a .
- A feladat szerint az átló ennek kétszerese: $d = 2a$.
- Az átlók felezik egymást, így a metszésponttól a csúcsig tartó szakasz hossza: a

2. A kialakuló háromszög:

- Az átlók metszéspontja és a rövidebb oldal egy olyan háromszöget alkot, aminek minden oldala a hosszúságú.
- Ez egy szabályos háromszög, aminek minden szöge 60 fokos.

3. Következtetés:

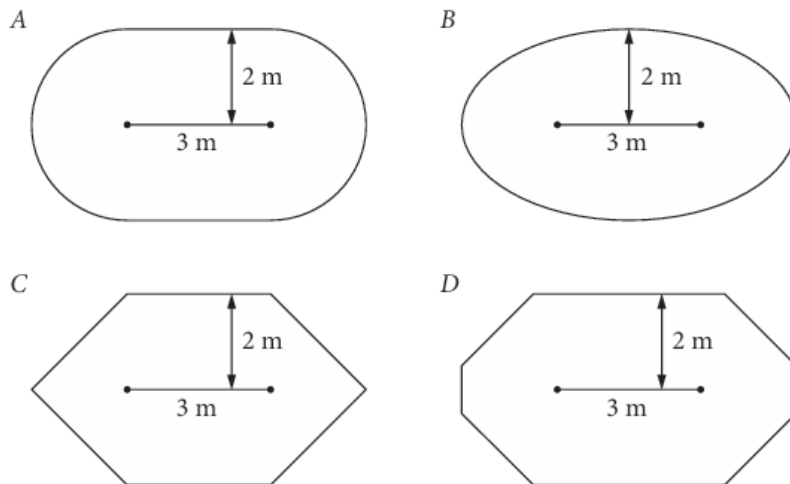
- Az átlók által bezárt egyik szög 60° , a másik (kiegészítő) szög $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Végeredmény:

A téglalap átlóinak hajlásszöge 60 fok (vagy 120 fok).

13. (A 2006. évi Kompetenciamérés nyomán)

Egy 3 méter szélességű biztonsági kapu a kapu alapvonalának minden pontjától legfeljebb 2 méter távolsáig érzékeli a mozgást. Az alábbi ábrák közül melyik mutatja a kapu által biztosított területet az alapvonal síkjában?



Megoldás:

1. A feltételek elemzése:

- A kapu alapvonala egy 3 méteres szakasz.
- Az érzékelő minden ponttól legfeljebb 2 méter távolságra jelez.
- A szakasz belső pontjaitól mért 2 méteres távolság egy párhuzamos egyenest ad.
- A szakasz végpontjaitól mért 2 méteres távolság egy-egy félkört (2 m sugarút) ad.

2. Az alakzat meghatározása:

- Az alakzat egy téglalapból (3 m x 4 m) és két végén egy-egy félkörből áll.
- Ezt a formát „stadion” alakzatnak is nevezik.

3. A lehetőségek vizsgálata:

- **A** ábra: Megfelel a leírásnak (egyenes szakaszok és kerekített lezárások).
- **B** ábra: Ellipszis, ami nem helyes, mert a szakasz mentén párhuzamosnak kellene lennie.
- **C, D** ábrák: Szögletesek, ami nem felel meg a köríves távolságmérésnek.

Végeredmény:

A helyes választ az „A” ábra mutatja.